

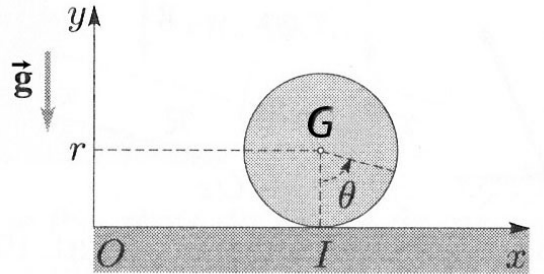
Mécanique des solides

Examen 28 Juin 2012 – Durée 1h30

*L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.*

Etude dynamique et énergétique d'un cerceau

Un cerceau ( $C$ ) de centre  $G$ , de masse  $m$ , de rayon  $r$  est posé à l'instant initial avec une vitesse du centre de masse  $\vec{v}_{G/R} = v_0 \vec{e}_x$  et une vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{C/R} = -\omega_0 \vec{e}_z$  le long l'axe ( $Ox$ ) d'un référentiel  $R(Oxyz)$  où ( $Oy$ ) est la verticale ascendante.



On considère que  $v_0 > 0$ ,  $\omega_0 > 0$  et  $v_0 < r\omega_0$ .

On notera :  $\dot{x}$  et  $\dot{\theta}$  respectivement vitesse du centre de masse et vitesse angulaire à  $t \neq 0$ .

On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur terrestre, et  $\mu$  le coefficient de frottement solide entre le cerceau et le sol.

Partie I : Eléments cinétique du cerceau

- a) Déterminer le moment d'inertie du cerceau par rapport à son axe ( $Gx$ ).
- b) Etablir les expressions de la quantité de mouvement et du moment cinétique du cerceau à un instant  $t$  quelconque.

## Partie II : Dynamique du cerceau sur le sol

- Etablir l'expression de la vitesse de glissement  $\vec{v}_g$  qui traduit le contact en I du cerceau sur le sol. Que devient cette expression à  $t = 0$  ?
- Ecrire les équations vectorielles du théorème du centre de masse et du moment cinétique appliqué en G.
- En déduire le mouvement du disque à  $t > 0$ . Montrer en particulier que s'il y a glissement initial, celui-ci cesse à l'instant  $t_1$  que l'on définira.
- Quel est le mouvement de (C) après  $t_1$  ?

## Partie III : Energétique du cerceau sur le sol

- Evaluer entre  $t = 0$  et  $t = t_1$  le travail des actions de contact exercées par l'axe (Ox) sur le cerceau (C).
- Retrouver ce résultat par l'application du théorème de l'énergie cinétique.

## Partie IV : Dynamique du cerceau sur un plan incliné

On considère à présent le roulement du cerceau posé **sans vitesse initiale** sur un tapis roulant d'axe (Ox) incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale ( $Ox_0$ ) (cf figure ci-dessous) et se **déplaçant à vitesse constante**  $\vec{v}_{\text{Tapis}/R} = v_1 \vec{e}_x$ .

- Donner l'expression de la vitesse de glissement  $\vec{v}_g$  qui traduit le contact en I du cerceau sur le tapis roulant. Que vaut cette vitesse à  $t = 0$  ?
- En utilisant les théorèmes de la dynamique, donner les équations différentielles du mouvement.
- Déterminer la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement en fonction de  $g$  et de  $\alpha$ .

